9.5

23-01-2012 Integrerend project systeemtheorie

1 a) $\frac{d}{dt} x_1 = x_2$

$\frac{d}{dt} x_2 = -x_1 + x_2^3 - u$

Show that $\begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ (\cos t)^3 \end{pmatrix}$ is a solution:

Invullen geeft $\frac{d}{dt} x_1^* = \cos(t) = \cos(t) = x_2^*(t)$

$\frac{d}{dt} x_2^* = -\sin(t) = -\sin(t) + (\cos(t))^3 - (\cos t)^3 = -x_1^* + x_2^{*3} - u^*$

Dus $\begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ (\cos t)^3 \end{pmatrix}$ is inderdaad een oplossing van het systeem

b) $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$

(oplossing invullen)

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \cos^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$

Dus de lineriesatie rondom de oplossing is

$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \cos^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$

15

2 $p(s) := s^3 + 3s^2 + 3s + k$

Nu ~~geb~~ zetten we dit in ~~de~~ Routh's tabel:

1	3
3	k
$\frac{9-k}{3}$	0
k	0
0	

Als alle nulpunten van $p(s)$ in open linker half vlak moet zijn dan moet gelden dat de eerste van rijen met eerste element ongelijk aan nul moeten zijn. Dit is het geval als $k \neq 6$ en $k \neq 0$ verder moet het eerste teken van elke rij hetzelfde zijn. (in dit geval dus positief door ~~de~~ 1 en 3)

Dus $\frac{9-k}{3} > 0$ en $k > 0$

$\downarrow$ $\downarrow$

dus $k < 9$ dus $k > 0$

Dus $\Rightarrow$ $0 < k < 9$

voor deze k 'has $p(s)$ all its roots in the open left half-plane'

15

~~1+9~~

~~9+4~~

~~6,6~~
8

3 $\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} u$

a) $(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda[\lambda(\lambda+3) - 1]$

$p(\lambda) = 0$ geeft:

$\lambda_1 = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\quad \sqrt{13} \approx 3,6$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad \lambda_3 > 0$ $\quad (\sqrt{9} = 3$ en dus $\sqrt{13} > 3)$

$\lambda_2 \approx \frac{-3 - 3,6}{2} \approx -3,3 \quad \vee \quad \lambda \approx 0,3$

$\lambda_2 < 0$ $\quad$ in ieder geval $\lambda_3 > 0$

Er is dus een λ die meer is dan nul en dus is het systeem niet (internal) stabiel

b) ~~Een~~ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$

dus $R = (B \quad AB \quad A^2B)$ de ~~controlleerbare~~ regelbare deelruimte is:

$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hierin zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineair onafhankelijk

Dus de rank$(R) = 3$ dan en slechts dan als $\beta \neq 0$

(want de laatste hebben we $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ en een nul dus dan $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ lin. onafh. als $\beta \neq 0$)

Dus voor alle β behalve $\beta = 0$ is het systeem ~~controlleerbaar~~ regelbaar

3 c) Dus na kijken voor $\beta = 0$
hier moeten we de 'uncontrollable eigenvalues' bepalen.

Als $\beta = 0$ dan word de controllable deelruimte R opgespannen als volgt:

$$R = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\10\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Nu nog een vector bedenken die lin. onafh. is: bijv. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Dan $Q = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -3 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\hat{A} = Q^{-1} A Q$ geeft:

Q^{-1} uitrekenen: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 10 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ Dus $Q^{-1} = \begin{pmatrix}10 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$Q^{-1}AQ =$

		0 1 0 1 -3 0 0 0 0	1 -3 0 -3 10 0 0 0 1
10 3 0 3 1 0 0 0 1		3 1 0 1 0 0 0 0 0	0 1 0 1 -3 0 0 0 0

dus $\hat{A} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

met $B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ want $\beta = 0$

$\hat{B} = QB = \begin{pmatrix}-3\\10\\0\end{pmatrix}$

Dus $\hat{A} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{0}\end{pmatrix}$ $\hat{B} = \begin{pmatrix}-3\\10\\0\end{pmatrix}$

$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$ dus:

Dus de matrix $\boxed{0}$ is een matrix die onregelbaar is want die kan je niet beïnvloeden met u.
$\boxed{0}$ is een scalar en heeft als eigenwaarde $\lambda = 0$
dus in het systeem $\hat{\Sigma}$ is $\lambda = 0$ de onregelbare eigenwaarde.
En het mooie is dat sommige eigenschappen zoals eigenwaarden niet veranderen in het systeem $\hat{\Sigma}$ t.o.v. Σ.
Dus is $\lambda = 0$ ook voor het originele systeem de onregelbare eigenwaarde.

20

Sorry dit (de vragen) staat in de verkeerde volgorde

4 a) $R = (B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B)$

$\tilde{R} = (\tilde{B} \quad \hat{A}\tilde{B} \quad \hat{A}^2\tilde{B} \quad \cdots \quad \hat{A}^{n-1}\tilde{B})$

met $\tilde{B} = SB$ en $\hat{A} = SAS^{-1}$ $\hat{A}^2 = SAS^{-1}SAS^{-1} = SA^2S^{-1}$ $\hat{A}^{n-1} = SA^{n-1}S^{-1}$

Dus $\hat{A}\tilde{B} = SAS^{-1}SB = SAB$ $\hat{A}^2\tilde{B} = SA^2S^{-1}SB = SA^2B$

tot en met $\hat{A}^{n-1}\tilde{B}$ $(SA_1S^{-1}SA_2S^{-1}SA_3S^{-1}\cdots SA_{n-1}S^{-1})SB = SA^{n-1}B$

Dit invullen in $\tilde{R}$:

$\tilde{R} = (\tilde{B} \quad \hat{A}\tilde{B} \quad \hat{A}^2\tilde{B} \quad \cdots \quad \hat{A}^{n-1}\tilde{B}) = (SB \quad SAB \quad SA^2B \quad \cdots \quad SA^{n-1}B)$
$= S(B \quad AB \quad A^2B \quad A^{n-1}B)$

Dus $\tilde{R} = SR$ zoals we moesten aantonen

b) $W = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\hat{A} \\ \tilde{C}\hat{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\hat{A}^{n-1} \end{pmatrix}$

$\tilde{C} = CS^{-1}$ $\hat{A} = SAS^{-1}$ $\tilde{C}\hat{A} = CS^{-1}SAS^{-1} = CAS^{-1}$

$\tilde{C}\hat{A}^2 = CS^{-1}SAS^{-1}SAS^{-1} = CA^2S^{-1}$ tot en met

$\tilde{C}\hat{A}^{n-1} = CS^{-1}SA_1S^{-1}\cdots SA_{n-1}S^{-1} = CA^{n-1}S^{-1}$

Invullen in $\tilde{W}$ geeft:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\hat{A} \\ \tilde{C}\hat{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\hat{A}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CS^{-1} \\ CAS^{-1} \\ CA^2S^{-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1}S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} S^{-1} = WS^{-1}$$

Dus $\tilde{W} = WS^{-1}$ zoals we moesten aantonen.

4

c) Prove that: Systeem 1 is regelbaar $\Leftrightarrow$ systeem 2 is regelbaar

Bewijs

($\Rightarrow$) Systeem 1 is regelbaar dus
rank$(R) = n$
verder geldt dat S inverteerbaar is, dus
S is niet singulier, er geldt dat als je een
niet singuliere matrix vermenigvuldigt met een andere
matrix dat de rank niet veranderd dus:
$\text{rank}(R) = \text{rank}(SR) = \text{rank}(\hat{R})$ (zie opdracht a))
dus rank$(\hat{R})$ (van systeem 2) is regelbaar

($\Leftarrow$) Dit is eigenlijk precies hetzelfde
maar nu $\hat{R} = SR$ dus omdat S niet singulier is:
$S^{-1}\hat{R} = R$
Nu systeem 2 regelbaar dus rank$(\hat{R}) = n$
$\text{rank}(\hat{R}) = \text{rank}(S^{-1}\hat{R}) = \text{rank}(R)$ dit mag omdat S inverteerbaar is
dus rank$(R) = n$
dus systeem 1 is regelbaar

$\square$

d) Prove that: systeem 1 waarneembaar $\Leftrightarrow$ systeem 2 waarneembaar

Bewijs:

($\Rightarrow$) systeem 1 is waarneembaar dus rank$(W) = n$
$\text{rank}(W) = \text{rank}(WS^{-1}) = \text{rank}(\hat{W})$ omdat S inverteerbaar is zie vraag c
dus rank$(\hat{W}) = n$
Dus systeem 2 is waarneembaar

($\Leftarrow$) systeem 2 is waarneembaar dus rank$(\hat{W}) = n$
nu $\hat{W} = WS^{-1}$ dus $\hat{W}S = W$ omdat S inverteerbaar is
dus $\text{rank}(\hat{W}) = \text{rank}(\hat{W}S) = \text{rank}(W)$ omdat S inverteerbaar is zie vraag c
dus rank$(W) = n$
dus systeem 1 is waarneembaar

$\square$

4e) Prove that: systeem 1 observable $\Rightarrow$
er bestaat <u>precies 1</u> inverteerbare matrix S zodat
$\hat{A} = SAS^{-1}$ $\hat{B} = SB$ $\hat{C} = CS^{-1}$

20

Bewijs:

Deze S bepalen we door middel van de kalman-decompositie. $S = \{v_1 \cdots v_{n-1}\, v_n \cdots v_r\, v_{r+1} \cdots v_k\, v_{k+1} \cdots v_p\}$
waarbij $\{v_1 \cdots v_{n-1}\}$ bepaalt word door wat alleen door R word opgespanne $\{v_n \cdots v_r\}$ bepaalt word door wat door R en W word opgespannen, $\{v_{r+1} \cdots v_k\}$ erbij word bedacht zodat rank(S) = n
$\{v_{k+1} \cdots v_p\}$ bepaalt word door wat door W word opgespannen. zodat $\hat{A} = SAS^{-1}$ $\hat{B} = SB$ en $\hat{C} = CS^{-1}$
Nu is systeem 1 waarneembaar dus rank(W) = n dus W word door n liniair onafhankelijke vectoren opgespannen.
En dus hoef je van $\{v_{r+1} \cdots v_k\}$ niet meer een vector te maken.
Dus S word uniek bepaalt door waar W van word opgespannen. ~~Dus~~ En deze moet bestaan, want je hebt die n lin. onafh. eigenvectoren. Dus als systeem 1 waarneembaar is dan bestaat er precies één inverteerbare matrix S zodat $\hat{A} = SAS^{-1}$ $\hat{B} = SB$ $\hat{C} = CS^{-1}$

$\square$

5a) $\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$ $\quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$

De 'transfer' ~~matrix~~ functie van Σ is:

$H(s) = C\,(sI - A)^{-1} B$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-a & -1 \\ 0 & s-a \end{pmatrix}$$

$(sI - A)^{-1}$ berekenen: $\left(\begin{array}{cc|cc} s-a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & s-a & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} s-a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{s-a} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} s-a & 0 & 1 & \frac{1}{s-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{s-a} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{s-a} & \frac{1}{(s-a)^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{s-a} \end{array}\right)$$

$$\text{Dus } (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-a} & \frac{1}{(s-a)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-a} \end{pmatrix}$$

Sorry de vragen staan in de verkeerde volgorde op dit blad

Harmen Dijk
2056534

verroly

5a) $(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-a} & \frac{1}{(s-a)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-a} \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

de 'transfer' ~~matrix~~ functie is $H(s) = C(sI-A)^{-1}B$ dus:

$$C(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-a} & \frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{s-a} \end{pmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{(s-a)^2} + \frac{2}{s-a}$$

Dus de 'transfer' functie is

$$H(s) = \frac{1}{(s-a)^2} + \frac{2}{s-a} = \frac{2s-2a+1}{(s-a)^2}$$

b) ~~Bem~~ Bepaal de 'impulse response' functie $h(t) = Ce^{At}B$

Eerst e^{At} bepalen:

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ nu Noem $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ en $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Omdat geldt: $DN = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$ (dus ze commuteren)

dan geldt $e^{N+D} = e^N e^D$ dus nu:

$e^A = e^{N+D} = e^N e^D$

$e^D = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$ (diagonaal matrix) $\qquad e^N = I + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(rest wordt nul want N is nilpotent)

Dus $e^D e^N = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & te^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$

Dus $e^A = \begin{pmatrix} e^\alpha & te^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$

$k(t) = Ce^{At}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\alpha & te^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\alpha & te^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & te^\alpha + e^\alpha \end{pmatrix}$

$C\cancel{A}e^{At}B = \begin{pmatrix} e^\alpha & te^\alpha + e^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cancel{(2e^\alpha + te^\alpha)}\ 2e^\alpha + te^\alpha$

Dus $k(t) = 2e^\alpha + te^\alpha = (2+t)e^\alpha$

15